QA-1
機率

考綱 Learning Objectives

QA-1.1	描述並區別連續與離散隨機變數。
QA-1.2	定義並區別機率密度函數、累積分配函數及反累積分配函數。
QA-1.3	給定一個離散機率函數，計算一個事件的機率。
QA-1.4	區別獨立與互斥事件。
QA-1.5	定義聯合機率，描述機率矩陣，並使用機率矩陣計算聯合機率。
QA-1.6	定義並計算條件機率，及區別條件與無條件機率。

貨幣時間價值、折現現金流量應用及市場報酬率：

最近這幾年的 FRM Part I 計量分析考綱不包括這些單元。由於 CFA Level I 計量方法考綱仍然包括這些單元。對這些單元有興趣的讀者，請參考筆者所出版「CFA Level I 計量方法－李宜豐教學筆記」。以下只列出三題 FRM 這些單元考古題供參考。

貨幣時間價值例子-1

Financial Risk Manager Handbook 2011 p.129

EXAMPLE 6.1: FRM EXAM 2002-QUESTION 48

An investor buys a Treasury bill maturing in 1 month for $987. On the maturity date the investor collects $1,000. Calculate effective annual rate (EAR).

a.17.0%.

b.15.8%.

c.13.0%.

d.11.6%.

答：a

解題邏輯很簡單。

月初以$987 買國庫券，月底國庫券到期，可取回$1,000。

計算當月份報酬率如下：

$$\$1{,}000 \div \$987 = 1.013171226$$

$$1.013171226 - 1 = 0.013171226 = 1.3171226\%$$

月報酬率為 1.3171226%。

計算有效年利率，只要把月報酬率加上 1 後，12 次方，再減去 1，也就是：

$$1.013171226^{12} = 1.170022377$$

$$1.170022377-1=0.170022377=17.0022377\%$$

最接近的選項為 17% (四捨五入)。

貨幣時間價值例子-2 Financial Risk Manager Handbook 2011 p.130

EXAMPLE 6.3: FRM EXAM 2002-QUESTION 51

Consider a savings account that pays an annual interest rate of 8%. Calculate the amount of time it would take to double your money. Round to the nearest year.

a. 7 years.

b. 8 years.

c. 9 years.

d. 10 years.

答：c

本題第一個命令句的主語 You 省略，Consider 為及物動詞「考量」的意思，係指要你考量，而 a savings account 為一個存款帳戶，是考量的受詞。
本題第個二命令句的主語 You 也省略，Calculate 也是及物動詞「計算」的意思，而 the amount of time 為多少年，是計算的受詞，而 it would take to double your money 乃一個形容詞子句，形容多少年，也就是指要花多少年，才能把投資額變成倍數。Round to the nearest year 係指四捨五入，以年為單位。

本題可簡述如下：
若年利率為 8%，計算須多少年 (四捨五入) 可使投資額成倍數？

本題的解法有下列三種方式：

1. 72 法則：以 72 除以年利率 (不須%單位)，即可求出達到投資額倍數的年數。

   $$\frac{72}{8}=9$$

2. 計算機按法：

   8 [I/Y] 1 [＋/－][PV] 0 [PMT] 2 [FV][CPT][N][＝] 9.006

3. 計算式算法：

   $$(1.08)^N=2$$

   $$ln(1.08)^N=ln2$$

   $$\mathrm{n}[\ln(1.08)]=\ln2$$

   $$\mathrm{n}=\frac{ln2}{ln1.08}$$

   再以計算機按出：

   1.08 [LN][STO][1] 2 [LN][÷][RCL] 1 [＝] 9.006

貨幣時間價值例子-3 2007 FRM Practice Exam 83

Company X owns a property with a book value of €80,000. There is a buyer willing to pay €200,000 for the property. However, Company X must also provide the buyer with a put option to sell the property back to Company X for €200,000 at the end of 2 years. Moreover, Company X agrees to pay the buyer €40,000 for a call option to repurchase the property for €200,000 at the end of 2 years. In effect, with this transaction Company X “borrows” money from the buyer. What is the annually compounded interest rate per year on this implied loan?

a. 11.80%.

b. 25.00%.

c. 41.40%.

d. cannot be determined.

Answer: a

If the property is worth less than €200,000 at the end of the 2 years, then the buyer's put option will be 'in the money' and the buyer will sell back the property to Company X. If the property is worth more than €200,000 at the end of the 2 years, then Company X's call option will be 'in the money' and Company X will repurchase the property from the buyer. In either case, Company X repurchases the property for €200,000 at the end of the 2 years. In effect, Company X has borrowed €160,000 (€200,000 purchase price received from the buyer less the€40,000 paid to the buyer for the call option) at time 0 and must repay € 200,000 at the end of 2 years. Therefore,

$$160{,}000 \times (1+i)^2 = 200{,}000$$

So, the interest rate (i) is 11.8% per year.

Incorrect: b

This answer incorrectly assumes a one-year horizon.

Incorrect: c

This answer incorrectly assumes Company X borrows €80,000 and repays €160,000.

Incorrect: d

The interest rate can be calculated from the data provided.

X 公司擁有一個帳面價值€80,000 的財產。有一買方願意付€200,000 買該財產。但是，X 公司須在 2 年後的年底提供買方以€200,00 賣財產回 X 公司的賣權，而 X 公司同意付買方

€40,000，買一個在 2 年後的年底以€200,000 買回該財產的買權。事實上，X 公司等於在此交易向買方「借款」，此隱含借款的每年年複率為何？

a. 11.80%。

b. 25.00%。

c. 41.40%。

d. 無法決定。

答：a

若在 2 年後的年底，該財產價值低於€200,000，則買方的賣權為「價內」，而買方會賣回財產給 X 公司。若該財產在 2 年後的年底的價值超過€200,000，則 X 公司的買權為「價內」，而 X 公司會從買方買回該財產。無論如何，X 公司皆會在 2 年後的年底以€200,000 買回該財產。實際上，等於 X 公司在 0 時，借€160,000 (從買方收到的買價€200,000 減去付給買方的買權之權利金€40,000)，而須在 2 年後的年底還€200,000。

因此，

$$160{,}000 \times (1 + i)^2 = 200{,}000$$

$$\therefore i = 11.8\% \text{ (每年)}$$

QA-1.1

描述並區別連續與離散隨機變數。

隨機變數 (random variable)：是一個不確定的數量／數字。

可能結果 (outcome)：是隨機變數的一個觀察值。

事件 (event)：是單一可能結果或一組可能結果。

互斥事件 (mutually exclusive events)：是不可能同時發生的事件。

周延事件 (exhaustive events)：包括所有可能結果。

以六面骰子為例，出現的數字是隨機變數。如果數字是 4，是一個可能結果。

擲出 4 是一個事件，擲出偶數是一個事件。擲出 4 跟擲出 6 是互斥事件，擲出偶數及擲出奇數是一組互斥事件，且週延事件。

機率分配 (probability distribution)：機率分配描述一個隨機變數所有可能結果的機率，所有可能結果的機率合計數為 1。一個簡單機率分配，就是投擲一個公平骰子，有 6 個可能結果，每一個機率為 1/6，所以合計為 1。明年 S&P 500 指數的所有可能報酬的分配機率，是同一個概念的較複雜版本。

離散隨機變數 (discrete random variable)：離散隨機變數的可能結果數是可以數的。每一可能結果，有一個可衡量及正數的機率。離散

隨機變數的一個例子是給定一個月分的下雨天數。因為可能結果有一個確定的數字，一個月的下雨天數不可能超過當月的天數。

機率函數 (probability function) (機率質量函數 (probability mass function))：的代號為 p(x)，決定一個隨機變數的機率，等於一個特定值。較正式的說法，p(x) 是隨機變數 X 的值為 x 的機率，或 p(x)＝p(X＝x)。

機率函數的兩個關鍵特性：

1. $0 \leqq p(x) \leqq 1$
2. $\Sigma p(x)=1$，一個隨機變數 X 所有可能結果 x 的機率之合計數等於 1。

例子 QA-1.1.1 2016 Kaplan FRM Part I Book 2 Quantitative Analysis p.14

Evaluating a probability function

Consider the following function:

$X=\{1, 2, 3, 4\}$, $p(x)=x/10$, else $p(x)=0$

Determine whether this function satisfies the conditions for a probability function.

Answer:

Note that all of the probabilities are between 0 and 1, and the sum of all probabilities equals 1:

$$\sum p(x)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=0.1+0.2+0.3+0.4=1$$

Both conditions for a probability function are satisfied.

評估一個機率函數

下列函數：

X＝{1, 2, 3, 4}，p(x)＝x/10，否則 p(x)＝0

是否符合機率函數的條件。

答：

注意所有機率介於 0 及 1，而且機率合計數等於 1。

$$\sum p(x)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=0.1+0.2+0.3+0.4=1$$

符合機率函數的兩個條件。

連續隨機變數 (continuous random variable)：連續隨機變數的可能結果是無限的，即使存在上下限亦然。從 0 到 100 英吋之間實際的每日下雨量，就是連續隨機變數的一個例子。因為實際的下雨量，可以是無限的價值數，每日下雨量可用英吋、半英吋、1/4 英吋、千分之英吋，或甚至更小的單位來衡量。因此，介於 0 及 100 英吋的每日可能下雨量是無限的。

這兩類分配的差異，以下列特性最明顯。

1. 離散分配的 x 無法發生時，p(x)＝0，如果可以發生的話，p(x)＞0，p(x) 即為「隨機變數 X＝x 的機率」。例如，六月下雨 33 天的機率為 0，因為不可能發生，但是六月下雨 25 天的機率卻有正值。
2. 連續分配的 x，即使能發生，p(x)＝0，我們只能考慮 $P(x_1 \leqq X \leqq x_2)$，其中x_1及x_2為實數。例如，六月下雨二英吋的機率為 0，因為二英吋在一個可能價值的無限範圍為一個單點。反之介於 1.99999999 及 2.00000001 英吋之間的下雨量機率，有正值，連續