

本章與下一章討論如何使用蒙地卡羅模擬法來估計財務風險的衡量指標。1940 年代，這些方法首次被運用於協助處理核子物理學所涉及的某些運算後，迄今已在科學與工程界具有相當長的歷史，其被廣泛運用於處理其他問題，比如與數值積分有關的問題等。在財務金融領域方面，它們是在 1970 年代末期開始用於衍生性金融商品訂價，並用以估計其避險比例，而最近更運用於估計風險值與其他財務風險的衡量指標。這些方法極具彈性且功能強大，可對付各類困難的計算問題。

蒙地卡羅模擬法的概念是，針對我們所感興趣的金融工具，根據其價格或報酬的隨機過程一再進行模擬。舉例而言，如果我們對估計 VaR 有興趣，每次的模擬皆將提供在持有期間結束時投資組合的一個可能價值。如果模擬的次數足夠時，則投資組合價值的模擬分配會收斂到投資組合未知的「真實」分配，因此我們便能使用所模擬的期末投資組合價值之分配來推論 VaR。

此模擬過程涉及許多特定的步驟。第一步是要為所感興趣的隨機變數選擇一個模型。在選定模型後，我們根據「主觀判斷」或可取得的任何歷史或市場資料來估計其參數，如波動度及相關係數等。然後，我們會為隨機變數建構虛擬或模擬的路徑。每一組的「隨機」亂數會為投資組合中的金融工具產生一組假設的期末價格。之後，重複進行這些模擬，直到相信模擬次數已經可以讓投資組合價值的模擬分配非常接近實際投資組合的「真實」（但未知的）分配，足以稱為一個可靠的代理工具為止。一旦完成上述工作，我們即能用此代理的分配來推論 VaR。

蒙地卡羅模擬法幾乎可以用於應付任何複雜度的問題，並且能輕易地處理其他難以解決的問題，比如路徑相依 (path dependency)、厚尾、非線性以及選擇權特性等。在處理多重維度（亦即其結果取決於一個以上的風險變數）的問題時，模擬法亦特別有用。而且，原則上，當問題的複雜度或維度增加時，蒙地卡羅模擬法相對即變得更具吸引力。

然而，在既存的其他簡單方法可以適度處理問題，則毋需使用模擬法此

類功能強大的方法：如同我們沒有必要拿大錘子強行敲開胡桃般（殺雞焉用牛刀）。所以，如果試圖為陽春型的買權訂價，即不需使用模擬法，因為使用 Black-Schole 訂價公式即可輕鬆地解決此問題；同樣地，如果想估計一個常態分配 VaR，將會使用一個已知並可提供正確答案的合適公式。因此，只有遇到更為棘手及無法使用這些簡單方法解決問題的情況時，才會使用模擬法。

因為我們希望除了解釋蒙地卡羅模擬法外，還能討論其應用於風險估計問題的方式，所以將討論分成兩部分，以方便說明：本章將初步解釋與介紹蒙地卡羅模擬法，第 9 章則說明其於風險衡量上之應用。<sup>1</sup>

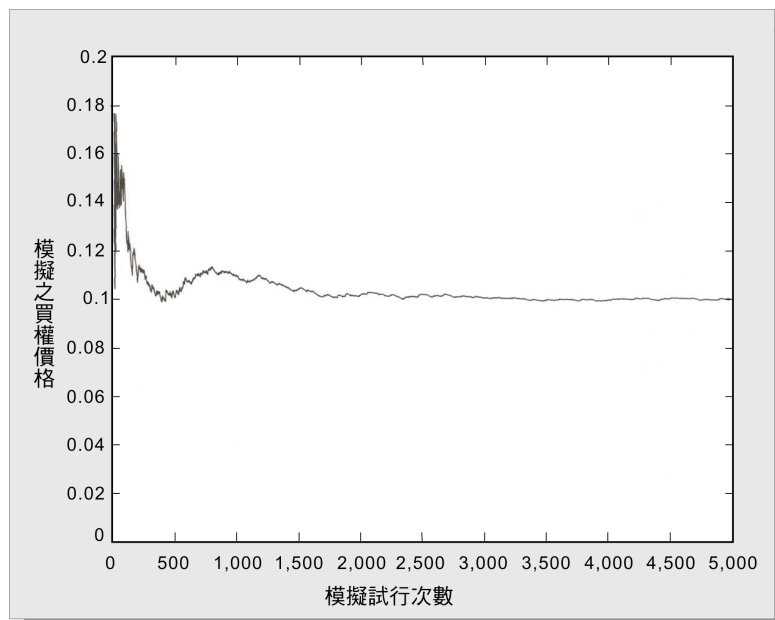
## 8.1 蒙地卡羅模擬法之使用

為了引發讀者的興趣，我們首先說明蒙地卡羅模擬法在財務領域的一些主要應用，其用途之一是應用於衍生性金融商品的訂價上。為了進行訂價，我們模擬標的資產，比如股票，其價格  $S$  在風險中立世界中的樣本路徑（基本上，我們假設一個幾何布朗運動的隨機過程，並以無風險報酬率  $r$  取代  $\mu$  做為期望報酬，來進行樣本路徑的模擬），然後計算衍生性金融商品在每個路徑終了時的報償（比如，一個履約價格為  $X$  的標準 Black-Scholes 買權，其報償即為  $\max(S_T - X, 0)$ ，其中  $S_T$  為到期時的股價）。我們重複執行上述步驟許多 ( $M$ ) 次，計算衍生性金融商品的樣本平均報償，並以無風險利率來折現，即可得到衍生性金融商品的價格。下一節將進一步說明此程序所涉及的更詳細步驟。

---

<sup>1</sup> 傳統的蒙地卡羅模擬法是根據隨機亂數（或嚴格來說是虛擬亂數 (pseudo-random)）產生器所抽取的亂數來進行模擬。然而，最近使用的新型蒙地卡羅模擬法則建議以準隨機 (quasi-random)（或低差異的）亂數來進行模擬抽樣。上述的方法沒有任何一個是使用真正的隨機變數：前者使用的亂數看起來是隨機的，而後者使用的是均勻散布的亂數，看起來甚至不像是隨機的。準隨機亂數法是非常有發展前途的，但為了文字的簡潔（請注意，準隨機亂數法尚未在財務風險衡量的文獻上帶來很大的衝擊），我們在此並不予以討論。要更瞭解此法及其在財務上的應用，請參閱 Jäckel (2002)。

為了提供一個實際的案例說明，假設我們應用此法為一個標準（即陽春型）的 Black-Scholes 買權做訂價。此買權的  $S_0 = X = 1$ 、 $\mu = r = 0$ 、 $\sigma = 0.25$ 、距到期期間為一年，而我們的模擬次數  $M$  最多到 5,000。此結果如圖 8.1 所示，顯示出模擬的買權價格一開始並不穩定，但會逐漸穩定下來並往「真實的」Black-Scholes 買權價格 0.0995 收斂。然而，此圖也清楚地指出，我們需要大量的模擬試行（意即有較大的  $M$  值），以便獲得精確的結果。



註：此圖假設係下列參數值估計而得： $S = X = 1$ 、 $r = \mu = 0$ 、 $\sigma = 0.25$ ，以及到期期間=1年。

圖 8.1 陽春型買權價格之蒙地卡羅模擬

蒙地卡羅模擬的第二個用途，即用來估計選擇權部位的敏感性參數。其想法係運用兩個（或多個）稍有不同的標的資產價值，來估計衍生性金融商品部位的價值。然後，我們即可依其結果來估計敏感性參數。舉例而言，一個標準歐式買權的 delta ( $\delta$ ) 大概等於選擇權價格的變動幅度相對於標的股價（小幅）變動的比率：

$$\delta \approx \frac{\Delta c}{\Delta S} = \frac{c(S+h) - c(S-h)}{2h} \quad (8.1)$$

其中，選擇權價格  $c$  是標的資產變數  $S$  的一個函數。 $S$  值會稍微上下小幅變動，使其變動量  $\Delta S$  等於  $2h$ 。在估計這些參數時，這兩組標的資產價格（即  $S + h$  與  $S - h$ ）皆會受到隨機「抽樣」誤差的影響，但我們可以利用同一組的  $S$  模擬值來決定此兩組標的資產的價格，以降低其混合效果以及所需進行的運算次數：簡言之，我們執行程式，跑出一組  $S$  的模擬值，將  $S$  值做上下的擾動（亦即往上漲  $h$  以及往下跌  $h$ ），來決定兩組的選擇權價值，然後得到一個 delta 的估計值。<sup>2</sup>我們可以使用類似的方法，利用所定義的離散近似公式，算出其他敏感性參數的估計值。<sup>3</sup>

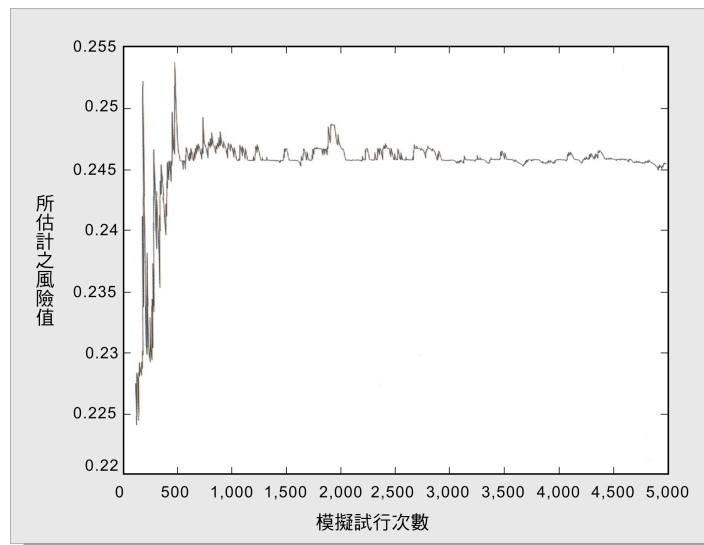
蒙地卡羅模擬的第三個用途當然是用來估計風險衡量指標。舉例而言，如果我們想要估計陽春型買權部位的 VaR，則可以模擬  $M$  個期末時的股票價值。不過，此時應該使用「真實的」股價過程，而非為衍生性金融商品訂價和估計敏感性參數時所用的風險中立股價過程（亦即使用的漂移項是  $\mu$  而非  $r$ ）。現在， $T$  值相當於 VaR 持有期間的結束時點，所以，以每個模擬的期末股價來重新評估選擇權價值（例如，使用 Black-Scholes 訂價公式；如果選擇權剛好是在  $T$  的時候到期，則使用選擇權的報償函數），並將所得的值減去選擇權部位的目前價值。如此可以給予  $M$  筆僅包含一單位選擇權的投資組合之 P/L 模擬值，將之乘以部位的選擇權數量，即可得到部位的 P/L 值。根據這一組  $M$  筆的 P/L 模擬值，即能以相關的順序統計量來求得 VaR，或是從 P/L 模擬值的分配狀況來讀取風險值。

為了說明 VaR 的蒙地卡羅模擬，假設我們投資 1 美元在一個參數設定與

<sup>2</sup> 必須確認我們是以同一組之標的資產模擬值，來得到向上與向下小幅變動的路徑。如果分別模擬兩組標的資產之價格路徑，並將之代入到 (8.1) 式來估計 delta，則 delta 變異數估計式將會是  $1/h^2$  階，因此當  $h$  很小時，變異數將會變得非常大。此種估計式顯然令人非常不滿意。相反地，如果我們只使用一組標的資產價格的模擬路徑，delta 變異數估計式的階數將會是 1，因而在  $h$  很小時，變異數也會隨著變小。請參閱 Boyle et al. (1997)，第 1304–1305 頁。

<sup>3</sup> 可參閱 Boyle et al. (1997)，第 1302–1309 頁；或 Clew and Strickland (1998)，第 105 頁。

圖 8.1 般的陽春型 Black-Scholes 買權。現在假設信賴水準為 95%，持有期間為 5 天，並對此部位進行次數  $M$  最多至 5,000 次的模擬，以估計 VaR。此練習的模擬結果如圖 8.2 所示，它指出在一開始以模擬法算出的 VaR 並不穩定，但會慢慢安定下來並且逐漸收斂至大約 0.245 的「真實」風險值。然而，此圖也清楚地說明，必須不斷地試行才能得到精確的結果。其亦建議為達到某個特定的精確度，在估計風險衡量時所需要的試行次數，會大於在選擇權訂價時所須的次數。此種結果還相當吻合我們的直覺，因為在選擇權訂價時，我們關心的是（報償）分配的平均數，然而在估計風險衡量指標時，我們則關心 (P/L) 分配的尾部，而且在樣本數固定的情況下，平均數的估計值會較尾部分位數的估計值更為精確。



註：此圖係假設下列參數值估計而得： $S = 1$ 、 $X = 0.5$ 、 $r = \mu = 0$ 、 $\sigma = 0.25$ 、到期期間=1年、持有期間=5天、信賴水準=0.95，以及投資金額1美元。

圖 8.2 陽春型買權 VaR 之蒙地卡羅模擬

相同的方法亦能延伸至財務風險其他衡量指標的估計上。實際上，我們會使用蒙地卡羅法來產生一個 P/L 的模擬分配或損失分配，之後應用第 3 章所討論的「加權平均分位數法」來獲得所想要的風險衡量指標之估計值。<sup>4</sup>

<sup>4</sup> 蒙地卡羅模擬法也能用在其他目的：例如，它可以用來估計風險衡量指標的信賴區間（參閱

## Box

### 8.1 隨機亂數之產生

蒙地卡羅模擬法是以「隨機」亂數產生器為基礎來抽取樣本的。但是嚴格來說，這些「隨機」亂數一點都不隨機。它們只是「虛擬 (pseudo) 的」隨機亂數，因為用來產生這些亂數的演算法其實是根據某個確定規則 (deterministic rule，沒有任何隨機元素的法則) 而來的，此種法則並不能產生真正的隨機亂數。這些法則會先取某個初始值，亦即「種子」值，然後產生一系列看起來像是隨機的數值，如果此亂數產生器設計得還不錯，則應該還可以通過大部分的隨機性質檢定。有許多「虛擬」隨機亂數產生器可供使用〔例如線性同餘產生器 (linear congruential generators) 及多重遞迴產生器 (multiple- recursive generators) 等〕，但在選擇使用時，我們必須注意到：即使是標準的電腦套裝軟體也會有一些有問題的亂數產生器，比如在早期 IBM 套裝軟體中聲名狼藉的 RANDU 產生器。此類問題是出現在一些「隱藏的」結構中，例如在高維度時會出現重複 (而非隨機) 的亂數模式。因此，對於蒙地卡羅模擬法的使用者而言，有個不錯的做法，即建立一個由不同的亂數產生器組成的小型函數庫，並且定期檢視及比較各個亂數產生器的執行結果。

我們也應該記住：在相同的初始「種子」值下，隨機亂數產生器所產生的，永遠是同樣的一串數字。最後，此種子值會再次出現，而這一連串的所有「隨機」亂數也會全部再重新出現一次。因此，所有隨機亂數產生器都會一直循環下去，只是一般而言，擁有較長循環期間的亂數產生器會優於循環期間較短的產生器。此外，我們也必須確保此循環期間夠長，足以應付手邊的問題；有一項有效的經驗法則，即循環期間必須超過在應用時所需的虛擬隨機亂數個數之平方：所以，舉例而言，如果需要  $2^{20} = 1,048,576$  兆個虛擬隨機亂數，則我們需要的亂數產生器，其循環期間就必須超過  $2^{40} = 1.0995$  兆(!)。因此，當我們使用蒙地卡羅模擬進行密集的計算與應用時，即應該檢查此條件是否成立。<sup>5</sup>

Box 6.4)，亦可用來估計模型風險 (參閱第 16 章的 16.3 節)。

<sup>5</sup> 欲更瞭解虛擬隨機亂數產生器，可參閱 Jäckel (2002，第 7 章)。